

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Алгебраическая геометрия. Часть 2
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: А.Я. Белов, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Целью данного курса является изучение основных положений и методов алгебраической геометрии. Первая часть курса (осенний семестр) представляет собой по существу введение в коммутативную алгебру.

Второй семестр представляет собой введение в теорию алгебраических многообразий и начала теории схем. Изучаются следующие понятия: аффинные и проективные алгебраические множества и многообразия, регулярные функции, морфизмы, рациональные отображения, особые точки, неособые кривые; предпучки и пучки на топологических пространствах, локально окольцованные пространства и схемы, морфизмы.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение продвинутого курса алгебраической геометрии.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области алгебраической геометрии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области алгебраической геометрии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области алгебраической геометрии.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.2 Оценивает свою деятельность, соотносит цели, способы и средства выполнения деятельности с её результатами
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий; владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической геометрии;  
 современные проблемы соответствующих разделов алгебраической геометрии;  
 понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
 основные свойства соответствующих математических объектов;  
 аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической геометрии.

уметь:

понять поставленную задачу;  
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической геометрии;  
 оценивать корректность постановок задач;  
 строго доказывать или опровергать утверждение;  
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);  
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической геометрии;  
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	(Ко)касательное пространство Зариского.		12		6
2	Алгебраические векторные расслоения.		12		6
3	Введение в теорию кохомологий когерентных пучков.		12		6
4	Линейные системы и отображения в проективное пространство, задаваемые линейными системами.		12		6
5	Подвижность и обильность.		12		6
Итого часов			60		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. (Ко)касательное пространство Зариского.

Конормальное расслоение и нормальный конус подмногообразию.

2. Алгебраические векторные расслоения.

1-мерные когомологии Чеха с коэффициентами в GL.

3. Введение в теорию когомологий когерентных пучков.

Когомологии обратимых пучков на проективных пространствах.

4. Линейные системы и отображения в проективное пространство, задаваемые линейными системами.

Теорема Вигдерсона о моделировании контактных схем схемами чётности.

5. Подвижность и обильность.

Дивизоры Вейля и (псевдо)дивизоры Картье.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

Основная литература

1. Алгебраическая геометрия для всех [Текст] = Undergraduate algebraic geometry/М. Рид, -М., Мир, 1991
2. Основы алгебраической геометрии [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / И. Р. Шафаревич. — 3-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2007. — 589 с. : ил. — (Классические направления в математике). - Список лит. к истор. очерку: с. 580-582. - Предм. указ.: с. 583-588. - 2000 экз. - ISBN 978-5-94057-085-1 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т). — 3-е изд., испр. и доп. — М. : МФТИ, 2011. — 544 с. +pdf. версия. - Библиогр.: с. 528. - Предм. указ.: с. 529-543. - 400 экз. - ISBN 978-5-7417-0378-6 (в пер.) .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Прикладная математика и информатика  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра дискретной математики  
**курс:** 1  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** А.Я. Белов, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.2 Оценивает свою деятельность, соотносит цели, способы и средства выполнения деятельности с её результатами
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгебраическая геометрия. Часть 2» обучающийся должен:

### знать:

фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической геометрии;  
современные проблемы соответствующих разделов алгебраической геометрии;  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической геометрии.

### уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической геометрии;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

### владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);  
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической геометрии;  
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Форма контроля: второй семестр -- дифференцированный зачет. В течение курса студенты решают и сдают листочки с задачами. Образцы задач приведены ниже.

1. (Насыщенные системы) Мультипликативная система  $S \subset A$  называется насыщенной, если  $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$ .

1). Пусть  $S$  насыщена и не содержит нулевой элемент (то есть не совпадает со всем кольцом  $A$ ). Докажите, что  $A \setminus S$  - объединение простых идеалов.

2). Всякая мультипликативная система  $S$  содержится в некоторой насыщенной системе  $S'$ . Для любой  $S$  существует наименьшая содержащая ее насыщенная система  $\overline{S}$  (она называется насыщением  $S$ ).

3). Если  $0 \notin S$ , то дополнение к  $\overline{S}$  совпадает с объединением простых идеалов, не пересекающихся с  $S$ .

4).  $S^{-1}A \cong \varprojlim S^{-1}A$ .

2. Пусть  $Y$  -- проективное многообразие с однородным координатным кольцом  $S(Y)$ . Докажите, что размерность Крулля  $\dim S(Y)$  равна  $\dim Y + 1$ .

3. Пусть  $Y$  -- аффинное многообразие. Докажите, что  $Y$  нормально тогда и только тогда, когда его аффинное координатное кольцо  $A(Y)$  целозамкнуто.

4. Пусть  $\varphi$  -- рациональное отображение многообразия  $X$  в  $Y$ . Докажите, что существует наибольшее открытое подмножество  $U$ , на котором  $\varphi$  представлено морфизмом.

5.. Докажите, что многообразие  $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$  (аффинная плоскость без начала координат) не является аффинным многообразием.

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1) Существует ли комплексная  $2 \times 4$ -матрица  $2 \times 2$ -миноры которой (выписанные в случайном порядке) суть а) 2,3,4,5,6,7 б) 3,4,5,6,7,8 ? Если да, приведите пример такой матрицы, если нет, объясните почему.

2) Покажите, что поле, аддитивная группа которого конечно-порождена, конечно как множество.

3) Покажите, что гладкая плоская кватрика имеет 28 бикасательных или одну 4-кратную касательную.

4) Покажите, что классы пропорциональных  $m \times n$ -матриц ранга не больше  $k$  образуют неприводимое проективное многообразие и найдите его размерность.

5) Обозначим через  $P$  проективное пространство плоских кубических кривых, проходящих через заданные 6 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, а все 6 не лежат на конике. Отображение  $f$  сопоставляет каждой точке плоскости, отличной от 6 данных, гиперплоскость в  $P$ , образованную всеми кубическими кривыми из  $P$ , проходящими через эту точку. Найдите  $\dim P$ , покажите, что отображение  $f$  корректно определено и замыкание его образа (в проективном пространстве, двойственном к  $P$ ) является гладкой кубической поверхностью, и явно опишите 27 пучков кубических кривых из  $P$ , которые переходят в 27 прямых на этой поверхности.



## Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.